コホモロジー3兄弟の親を探して

Science Lectureship Award of Chiba University 2024

寺杣　友秀

法政大学理工学部
経営システム工学科

2024/11/7

Table of contents

ゼータ関数と多重ゼータ値

バーゼル問題

多重ゼータ値についての話をしたいと思います。
ベルヌーイは次の問題を出しました。これは**バーゼル問題**と呼ばれています。

Problem (バーゼル問題)

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots =$$

ゼータ関数と多重ゼータ値

バーゼル問題

多重ゼータ値についての話をしたいと思います。
ベルヌーイは次の問題を出しました。これは**バーゼル問題**と呼ばれています。

Problem (バーゼル問題)

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

ゼータ関数と正の偶数での値

冪の所をもっと一般化して

$$\zeta(s)=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots$$

としたものを**リーマン・ゼータ関数**といいます。

このリーマンゼータ関数を用いれば、さっきの等式は $\zeta(2)=\dfrac{\pi^2}{6}$

とあらわせます。

ゼータ関数と正の偶数での値

冪の所をもっと一般化して

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$$

としたものを**リーマン・ゼータ関数**といいます。
このリーマンゼータ関数を用いれば、さっきの等式は $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ とあらわせます。
驚くべきことにリーマン・ゼータ関数について、一般的に

$$\zeta(2k) = (\text{有理数}) \times \pi^{2k}$$

がなりたつことが**オイラー**によって見つけられました。

ゼータ関数と正の偶数での値

冪の所をもっと一般化して

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$$

としたものを**リーマン・ゼータ関数**といいます。

このリーマンゼータ関数を用いれば、さっきの等式は $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ とあらわせます。

驚くべきことにリーマン・ゼータ関数について、一般的に

$$\zeta(2k) = (\text{有理数}) \times \pi^{2k}$$

がなりたつことが**オイラー**によって見つけられました。

このような等式が成り立つのに、何か「根源的な理由」でもあるのでしょうか？

ゼータ関数の 2 以上の整数での値

この式から $\zeta(2k)$ は $\zeta(2)^k$ の有理数倍となっていることがわかります。

ゼータ関数の 2 以上の整数での値

この式から $\zeta(2k)$ は $\zeta(2)^k$ の有理数倍となっていることがわかります。
自然な疑問として k を 2 以上の奇数も偶数も全部併せて $\zeta(k)$ たちの間にはなにかもっと簡単な関係があるかのでしょうか。なにか面白い関係式があると期待をしてもおかしくはありません。

ゼータ関数の 2 以上の整数での値

この式から $\zeta(2k)$ は $\zeta(2)^k$ の有理数倍となっていることがわかります。
自然な疑問として k を 2 以上の奇数も偶数も全部併せて $\zeta(k)$ たちの間にはなにかもっと簡単な関係があるかのでしょうか。なにか面白い関係式があると期待をしてもおかしくはありません。
しかし、この問題は期待に反して、現在はかなり確からしい根拠を持って「$\zeta(k)$ たちの間には、上にあげたもの以外の関係式はない」と予想されています。

ゼータ関数の 2 以上の整数での値

この式から $\zeta(2k)$ は $\zeta(2)^k$ の有理数倍となっていることがわかります。
自然な疑問として k を 2 以上の奇数も偶数も全部併せて $\zeta(k)$ たちの間にはなにかもっと簡単な関係があるかのでしょうか。なにか面白い関係式があると期待をしてもおかしくはありません。
しかし、この問題は期待に反して、現在はかなり確からしい根拠を持って「$\zeta(k)$ たちの間には、上にあげたもの以外の関係式はない」と予想されています。
その根拠というのが多重ゼータ値についてのザギエ予想です。

多重ゼータ値とその関係式

多重ゼータ値の積の構造

ザギエ予想を述べるためにはリーマンゼータの 2 以上の整数での値を一般化した「多重ゼータ値」というものを考えるのがとても有用です。$k_1, \ldots, k_d \leq 1, k_d \geq 2$ なる整数の組 $\mathrm{k} = (k_1, \ldots, k_d)$ を許容指数という。

$$\zeta(k_1, \ldots, k_d) = \zeta(\mathrm{k}) = \sum_{0<m_1<\cdots<m_d} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_d^{k_d}}$$

を多重ゼータ値といいます。ここで $m_1, \ldots, m_d$ は上の不等式を満たす正の整数を動くものとします。$d = 1$ の時はリーマンゼータ値となるので、リーマンゼータの整数での値を一般化したものとなります。

多重ゼータ値の重さと関係式

許容指数 k の**重さ** $w = w(\mathrm{k})$ を $w(\mathrm{k}) = k_1 + \cdots + k_d$ によって定める。多重ゼータ値にはたくさんの関係式がある。

1. 調和シャッフル関係式（2 次の関係式）
   $\zeta(2)\zeta(2) = \zeta(4) + 2\zeta(2,2)$
2. 積分シャッフル関係式（2 次の関係式）
   $\zeta(2)\zeta(2) = 2\zeta(2,2) + 4\zeta(1,3)$
3. 2 重シャッフル関係式（1 次の関係式）
   $\zeta(4) + 2\zeta(2,2) = 2\zeta(2,2) + 4\zeta(1,3)$

上の関係式はすべて**重さが同じ多重ゼータ値の間の関係式**となっている。

ザギエの予想

ザギエはZ係数の近似関係式を実験的に求め、次の予想（ザギエ予想）を立てた。$Z_w = \sum_{w(\mathbf{k})=w} \zeta(\mathbf{k})\mathbb{Q}$ とおく。

Conjecture (Zagier)

1. 異なる w について Z_w たちは一次独立である。
2. $\sum_{w=0} d_w t^w = \dfrac{1}{1-t^2-t^3}$ とすると $d_w = \dim(Z_w)$

この予想に関して混合テイト・モチーフを用いることにより下のような次元の評価は可能となる。

Theorem (Deligne-Goncharov, T.)

上の級数で定まる d_k に対して、$\dim(Z_w) \le d_k$ となる。

3 つのコホモロジー理論とモチーフ

位相空間の同相類をどのように判別するかについて位相空間の不変量を考えることは重要である。不変量を構成するために、代数を使うことが有効である。その一つが位相空間の特異ホモロジーと特異コホモロジーである。これらは同相な位相空間では同型な加群となるので位相的不変量と呼ばれる。
次に現れたのが可微分多様体に対して微分形式を用いた不変量でド・ラム・コホモロジーである。ド・ラムの定理によれば、ド・ラム・コホモロジーと特異コホモロジーは適当な係数を選べば同型である。

3 つのコホモロジー理論とモチーフ

コホモロジー理論が数論にも応用できるのではないかと初めに示唆したのがヴェイユであるがそれを実際にエタール・コホモロジーとして実現して見せたのがグロタンディークである。
3 つのコホモロジー理論には次の性質がある。

1. 写像に関する反変性。コンパクト非特異射影多様体に対する双対性。それらから出てくる共変性
2. ド・ラムの定理やエタールコホモロジーと特異コホモロジーの間の比較定理

グロタンディークはこれらの性質に注目し、さらに後で述べるホッジ予想への手がかりとして、これらの性質のみを用いて圏を構成するモチーフの理論が有効ではないかと考えた。

微分積分学の基本定理、グリーンの定理

しばらく、高次元幾何学における微積分と位相幾何学について述べることにする。まず、手始めに**微分積分学の基本定理**とその 2 次元版である**グリーンの定理**について話そう。

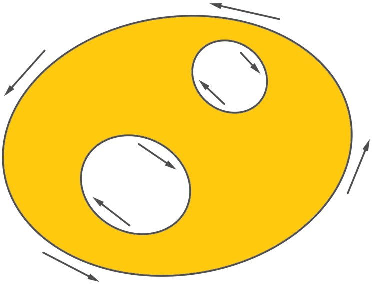
Theorem (微分積分学の基本定理)

$f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx}$ とするとき $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ が成り立つ

この定理は区間 $[a, b]$ の境界が $\{a, b\}$ となることであると解釈することにより、2 次元関数の積分、つまり面積分と線積分についての定理である「グリーンの定理」に一般化される。

領域と境界

グリーンの定理を考える前に領域とその境界についての説明をしよう。下の図のような領域を D とその境界を考える。境界には領域を左側にみて前進するような向きが付けられている。領域に対して境界をとる操作 ∂ を境界作用素とよぶ。境界作用素を考えるには領域や曲線の整係数一次結合を考える。



グリーンの定理

このように境界作用素を定義すると、次のグリーンの定理が成り立つ。

Theorem (グリーンの定理)

上の状況で

$$\int_D \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial D} (f(x,y)dy + g(x,y)dx)$$

ここで左辺の積分は 2 次元領域上の積分で面積分とよばれ、右辺は曲線に沿った積分で線積分と呼ばれる。

微分形式

両辺の被積分関数のような 2 変数無限回微分可能関数（C^∞-関数）と形式的記号 $dx, dy, dxdy$ とをワンセットにしたもの例えば

$$f(x,y)dy + g(x,y)dx, \quad h(x,y)dxdy$$

のようなものを微分形式という。これらに対して次の「外微分」という演算操作 d を考える。

$$d\bigl(f(x,y)\bigr) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

$$dxdy = -dydx, \quad dxdx = dydy = 0$$

この規則を用いれば $d(f(x,y)dy) = (\partial f/\partial x)dxdy$ という式が得られる。

グリーンの定理 再訪

領域 D に対する境界作用素 ∂ と微分形式

$$\omega = f(x,y)dy + g(x,y)dx$$

に対する外微分作用素 d を用いるとグリーンの定理は次のように書ける。

Theorem (グリーンの定理 2)

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega$$

ストークスの定理

実は $\mathbf{R}^1$ 内の区間とその境界についての微分積分学の基本定理や $\mathbf{R}^2$ 内の領域とその境界についてのグリーンの定理は 3 次元以上の領域についてのストークスの定理に一般化される。
n 次元空間の座標を $(x_1, \ldots, x_n)$ とする。微分形式とは $f(x_1, \ldots, x_n)$ を C^∞ 関数として

$$f(x_1, \ldots, x_n) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

というもの和の形（一次結合）で表されるものである。微分形式 ω の形式的記号の部分に出てくる dx_i の個数が k 個であるとき、ω は k 次微分形式という（記号 $\wedge$ を入れた）。例えば $f(x_1, x_2)dx_1$ は 1 次、$h(x_1, x_2)dx_1 dx_2$ は 2 次の微分形式である。外微分作用素 d についても前のスライドと同じ規則で定める。

ストークスの定理

n 次元空間においても積分を考える図形を定義する。荒っぽく言えば、k 次元の三角形で媒介変数表示されるものは k 次元単体といい、その整係数一次結合を k サイクルという。次の定理はストークスの定理と呼ばれる。

Theorem (ストークスの定理)

γ を $\mathbf{R}^n$ 内の k サイクル、ω を $(k-1)$ 次微分形式とすると

$$\int_\gamma d\omega = \int_{\partial\gamma} \omega$$

が成り立つ。

ベクトル解析では $n=3, k=2$ の場合をストークスの定理、$n=3, k=3$ の場合をガウスの発散定理という。

多様体と微分形式

n を 0 以上の整数とする。R^n の開集合を貼り合わせてできる集合を多様体という。ただし貼り合わせの写像は C^∞ 写像となるものとする。例えば 3 次元空間の中の半径 1 の球面
$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ は多様体の例である。用いる開集合の座標は局所座標と呼ばれる。
$0 \leq k \leq n$ とする。局所座標と偏微分の座標変換公式を用いて微分形式の貼り合わせも定義され、多様体 X 上の k 次微分形式が定義される。
また k 次元三角形から C^∞ 写像を用いて X においても、k 単体や k サイクルが定義される。

多様体のストークスの定理

$C_k(X)$ を X の k サイクル全体のなす集合、$A^k(X)$ を X の k 次微分形式のなす集合とする。$A^k(X)$ は無限次元ベクトル空間、$C_k(X)$ は加群となる。多様体上のストークスの定理は次のような定理である。

Theorem (ストークスの定理)

以上の記号の元で、$\omega \in A^{k-1}(X), \gamma \in C_k(X)$ に対して

$$\int_\gamma d\omega = \int_{\partial\gamma} \omega$$

が成り立つ

閉形式と完全形式

さて複体とコホモロジーについて述べる。

Definition

多様体 X 上の微分形式 $\omega \in A^k(X)$ が**閉形式**であるとは $d\omega = 0$ を満たすことである。また $d\eta = \omega$ となる $\eta \in A^{k-1}(X)$ が存在するとき、ω は**完全形式**であるという。

Theorem

外微分作用素を $d_k : A^k(X) \to A^{k+1}(X)$ としたとき、$d_{k+1}d_k = 0$ となる．とくに完全形式は閉形式である。

Problem

逆に閉形式は完全形式か？

閉形式と完全形式

この問題は X の形による、というのが答えである。γ を閉サイクル、つまり $\partial\gamma = 0$ として ω が完全形式とすると、ストークスの定理を用いて

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma d\eta = \int_{\partial\gamma} \eta = 0$$

となるはずである。つまり完全形式は閉サイクルでの積分は 0 となる事がわかる。
このことを踏まえて、次の例が完全形式ではない閉形式の例となっている。

複体とコホモロジー

$X = \mathbb{C} - \{0\}$ とする（$\mathbb{C}$ は複素平面）。$z = x + iy$ の局所座標を (x, y) と定めると X は多様体で、

$$\frac{dz}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}(dx + idy)$$

は X 上の複素数係数の微分形式で、閉形式であることがわかる。また反時計周りにまわる単位円 γ を考えると、これは閉サイクルである。しかしその線積分は

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0$$

となり $\dfrac{dz}{z}$ が完全形式ではないことを示している。

複体とコホモロジー

n 次元多様体 X 上の微分形式と外微分の列

$$0 \to A^0(X) \xrightarrow{d_0} A^1(X) \xrightarrow{d_1} \cdots \xrightarrow{d_{n-1}} A^n(X) \to 0$$

をド・ラム複体という。上のような線形写像の列で $d_k \circ d_{k-1} = 0$ となるものを一般に複体という。d_{k-1} の像 $\mathrm{Im}(d_{k-1})$ は完全形式の空間であり、d_k の核 $\mathrm{Ker}(d_k)$ は閉形式の空間である。

$$H^k_{dR}(X, \mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(d_k)/\,\mathrm{Im}(d_{k-1})$$

をド・ラム・コホモロジーという。複素数係数ド・ラム・コホモロジーについても $H^k_{dR}(X, \mathbb{C})$ が同様に定義される。これらは閉形式が完全形式からどれくらい離れているかを示す指標ともいえる。先ほどの例では $H^1_{dR}(\mathbb{C} - \{0\}) = \mathbb{R}$ となっている。

特異ホモロジー

X の k サイクルのなす加群 $C_k(X)$ の列と、その境界作用素 ∂ についても $\partial \circ \partial = 0$ が成立することがわかるので、次の複体を得る。

$$0 \to C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} \dots \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \to 0$$

これについては双対加群の列を考えることができて

$$0 \to C^0(X) \xrightarrow{\delta_0} C^1(X) \xrightarrow{\delta_1} \dots \xrightarrow{\delta_{n-1}} C^n(X) \to 0$$

という複体が得られる。k 次特異コホモロジーを

$$H_B^k(X, \mathbb{Z}) = \mathrm{Ker}(\delta_k) / \mathrm{Im}(\delta_{k-1})$$

と定義する。同様にして $\mathbb{Q}$ 係数、$\mathbb{R}$ 係数、$\mathbb{C}$ 係数の特異コホモロジーが定義される。

ド・ラムの定理

評価写像 $\mathrm{comp} : A^k(X) \to C^k(X, \mathrm{R})$ を $\omega \in A^k(X)$ と $\gamma \in C_k(X, \mathrm{R})$ に対して $\mathrm{comp}(\omega)(\gamma) = \int_\gamma \omega$ により定義する。この時ストークスの定理より

$$\mathrm{comp}(d\omega)(\gamma) = \int_\gamma d\omega = \int_{\partial\gamma} \omega = (\delta\, \mathrm{comp}(\omega))(\gamma)$$

となる。従って下の命題が成り立つ。

Proposition

下の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc} A^{k-1}(X) & \xrightarrow{d} & A^k(X) \\ \mathrm{comp} \downarrow & & \downarrow \mathrm{comp} \\ C^{k-1}(X, \mathrm{R}) & \xrightarrow{\delta} & C^k(X, \mathrm{R}) \end{array}$$

ド・ラムの定理

この命題からド・ラム・コホモロジーから特異コホモロジーへの写像

$$H^k_{dR}(X, \mathrm{R}) \to H^k_B(X, \mathrm{R}) \tag{1}$$

が得られる。次の定理は**ド・ラムの定理**と呼ばれる

Theorem (ド・ラムの定理)

写像 (1) は同型である。

この同型写像は**ド・ラム同型**と呼ばれる。この同型は複素係数にすることもできる。

複素多様体とホッジ分解

多様体における局所座標を $\mathbf{R}^n$ の代わりに $\mathbf{C}^n$ に取り替え、貼り合わせに用いる写像を正則写像に変えたものを n 次元複素多様体という。複素多様体の代表的な例として非特異複素代数多様体がある。これは複素代数方程式で定義された集合で多様体の構造が入るもの（非特異）のことである。
貼り合わせで用いた座標 $(z_1, \ldots, z_n)$ は局所複素座標という。z_i の実部を x_i、虚部を y_i とすると、$(x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots x_n, y_n)$ が局所座標となり n 次元複素多様体は $2n$ 次元多様体となる。従ってド・ラムコホモロジー、特異コホモロジーが定義される。X を複素多様体とすると、ド・ラムの定理から

$$H_B^k(X, \mathbf{Q}) \subset H_B^k(X, \mathbf{C}) \simeq H_{dR}^k(X, \mathbf{C})$$

という写像が得られる。

複素多様体とホッジ分解

ここでの微分形式は C 値 C^∞ 関数を係数とする dx_j, dy_j の外積たちを基底とする一次結合であるが、基底を $dz_j = dx_j + idy_j, \overline{dz_j} = dx_j - idy_j$ の外積たちに取り替える事ができる。$0 \leq p, q \leq n$ を固定して

$$dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge \overline{dz_{i_1}} \wedge \cdots \wedge \overline{dz_{i_q}}$$

の形の一次結合で書かれる微分形式を (p, q)-形式という。
(p, q)-形式全体の空間を $A^{p,q}(X)$ と書くと、

$$A^n(X) = \oplus_{p+q=n} A^{p,q}(X)$$

なる直和分解が得られる。$dA^{p,q} \subset A^{p+1,q} \oplus A^{p,q+1}$ となる。

複素多様体とホッジ分解

次の定理に出てくる分解は**ホッジ分解**と呼ばれる。

Theorem (ホッジ分解)

射影的 (複素射影空間に埋め込める) 非特異複素代数多様体（以後単に**非特異射影多様体**という）を X とするとド・ラム・コホモロジーは次の分解を持つ。

$$H^k_{dR}(X, \mathbb{C}) = \oplus_{p+q=k} H^{p,q}(X)$$

さらに埋め込み $H^k_{dR}(X, \mathbb{R}) \subset H^k_{dR}(X, \mathbb{C})$ についての複素共役を $\overline{**}$ と書くと、$\overline{H^{p,q}(X)} = H^{q,p}(X)$ となる。

この定理の証明には調和形式の理論が使われる。

ホッジ理論

ここまでのまとめ

これまで出てきた登場人物の紹介

1. 特異コホモロジー（ベッチ理論）
2. ド・ラム・コホモロジー（ド・ラム理論）
3. 二つのコホモロジーの同型（ド・ラムの定理）
4. ホッジ分解

さて、いよいよモチーフの理論に移りましょう。

ホッジ理論

ここまでのまとめ

これまで出てきた登場人物の紹介

1. 特異コホモロジー（ベッチ理論）
2. ド・ラム・コホモロジー（ド・ラム理論）
3. 二つのコホモロジーの同型（ド・ラムの定理）
4. ホッジ分解

さて、いよいよモチーフの理論に移りましょう。
そのまえに . . .

途中休憩

グロタンディークの横顔

モチーフ理論の創始者「グロタンディーク」はフランスの一部では神格視されている。

途中休憩

グロタンディークの横顔

モチーフ理論の創始者「グロタンディーク」はフランスの一部では神格視されている。

「まじ神」と言われている

途中休憩

グロタンディークの横顔

モチーフ理論の創始者「グロタンディーク」はフランスの一部では神格視されている。

「まじ神」と言われている (うそです)。

途中休憩

グロタンディークの素顔

「スキーム」「エタール・トポロジー」、「トポス」、「モチーフ」などの理論と「ランゲージ」を生み出した。数学の方向性を予言し、一貫した独特の哲学を提唱した。その一つが「重さのヨガ」（Yoga of weight）と言われるモチーフの理論である。
ある時から数学の第一線から退き、波乱の人生を送った。第一線後の著書としては Recoltes et semailles(日本語訳：収穫と蒔いた種と) がある。

途中休憩

グロタンディークの素顔

日本では

途中休憩
グロタンディークの素顔

日本では親しみをもって「グロたん」と呼ばれている

途中休憩

グロタンディークの素顔

日本では親しみをもって「グロたん」と呼ばれている（うそです）

ホッジ構造

X を非特異射影多様体とする。このとき $H^k_B(X,\mathbb{Z})$ には次の構造があることを述べた。

1. $H^k_B(X,\mathbb{Z})\otimes\mathbb{C}$ には $H^k_{dR}(X,\mathbb{R})\otimes\mathbb{C}$ とのド・ラムの定理による同型を通じてホッジ分解

$$H^k_B(X,\mathbb{Z})\otimes\mathbb{C}\simeq\bigoplus_{p+q=k}H^{p,q}(X)$$

がある。

2. $H^k_B(X,\mathbb{R})\subset H^k_B(X,\mathbb{C})$ に関する共役について $\overline{H^{p,q}(X)}=H^{q,p}(X)$ が成り立つ。

$H^{p,q}(X)$ はホッジ (p,q)-成分という。上の (1), (2) の構造をホッジ構造という。

代数的サイクルとホッジ予想

X を n 次元非特異射影多様体として W をその（複素）余次元 d の部分代数多様体とする。このとき W は $2(n-d)$ 次元の閉サイクルとなる。従ってそのポアンカレ双対 $\mathrm{cl}(W)$ は $H_B^{2d}(X, \mathbb{Q})$ の元を与える。このようなサイクルの $\mathbb{Q}$ 係数一次結合を代数的サイクルという。余次元 d 代数的サイクルのなす群の 0 と有理同値である類のなす部分群による商群をチャウ群といい $\mathrm{CH}^d(X)_\mathbb{Q}$ と書く。このとき W に対して $\mathrm{cl}(W)$ を対応させる写像は

$$\mathrm{CH}^d(X)_\mathbb{Q} \to H_B^{2d}(X, \mathbb{Q})$$

なる写像を誘導する。この写像をサイクル写像という。実はこの写像の像は $H_{dR}^{2d}(X, \mathbb{C})$ との同型を通じてホッジ (d, d)-成分 $H^{d,d}(X)$ に含まれる。

ホッジ予想

次の予想は**ホッジ予想**と言われる。

Conjecture (ホッジ予想)

前のスライドから導かれる写像

$$\mathrm{CH}^d(X)_{\mathbb{Q}} \to H_B^{2d}(X, \mathbb{Q}) \cap H^{d,d}(X)$$

は全射であろう。

この予想は今のところ、$d = 1$ やいくつかの特別な場合を除いては、手がかりさえつかめていない。ただこの予想が成り立つとするといろいろと面白い事が言えるので、成り立ってほしいと多くの人が願っている。そういう人たちの鼻を明かしてやろうと反例を見つけようとしているひともいる。

代数的対応とホッジ構造

ホッジ予想の一つの帰結として、ホッジ構造を保つ写像と代数的対応の関係が明確化できることがある。X, Y を非特異射影多様体とする。X から Y へ代数的対応を

$\mathrm{Cor}(X, Y) = CH^{\dim Y}(Y \times X)$ と定義する。これは多価写像を一般化したものである。さらに X, Y, Z を射影代数多様体とするとき代数的対応の合成写像

$* \circ * : \mathrm{Cor}(Y, Z) \times \mathrm{Cor}(X, Y) \to \mathrm{Cor}(X, Z)$ が交叉理論を用いて

$$\eta \circ \xi = p_{Y*}\Big[(\eta \times \xi) \cap (Z \times \Delta_Y \times X)\Big] \in CH^{\dim X}(Z \times X)$$

により定義される。ここで p_Y は

$(Z \times Y) \times (Y \times X) \to Z \times X$ なる射影とする。代数的対応は合成に関して結合的である。$\mathrm{Cor}(X, X)$ は環になる。

チャウ・モチーフとホッジ構造

非特異射影多様体 X と $\mathrm{Cor}(X, X)$ の冪等元 e との組 (X, e) を対象として、代数的対応と冪等元用いてを射の空間を構成することにより圏が構成できる。これをチャウ・モチーフという。

$pr_X : Y \times X \to X, pr_Y : Y \times X \to Y$ を射影として

$\xi \in \mathrm{Cor}(X, Y)$ とする。$\alpha \in H_B^k(Y, \mathbb{Q})$ に対して

$$(\omega_B(\xi))(\alpha) = pr_{X*}(pr_Y^*(\alpha) \cap \mathrm{cl}(\xi))$$

によって定義するとホッジ構造を保つ $\mathbb{Q}$ 線形写像となり、

$$\mathrm{Cor}(X, Y) \xrightarrow{\omega_B} \bigoplus_k \mathrm{Hom}_{HS}(H_B^k(Y, \mathbb{Q}), H_B^k(X, \mathbb{Q}))$$

なる写像が得られる。これは結合に対して協調的である。もしホッジ予想が成り立つとしたら、上の写像は全射となる。

モチーフはコホモロジー理論を生み出す

チャウ・モチーフ $M=(X,e)$ に対して、$\omega_B(e)H^*_B(X)$ を対応させるとモチーフの圏から $\mathbb{Q}$ ベクトル空間への関手が構成できる。これをベッチ実現といい M_B と書く。同様にして、$\omega_{dR}(e)H^*_{dR}(X,\mathbb{C})$ を対応させるとホッジ分解つきのベクトル空間への関手が定まる。これはド・ラム実現といい M_{dR} と書く。またド・ラム同型から $M_B\otimes\mathbb{C}$ と $\otimes M_{dR}\otimes C$ はの同型が引き起こされる。これを比較同型という。

この意味でモチーフとは特異コホモロジーやド・ラム・コホモロジーという二つのコホモロジー理論を生み出す源である、といえる。

三人目の兄弟

エタール・コホモロジー

コホモロジー 3 兄弟の一番下の兄弟は**エタール・コホモロジー**である。これは体の絶対ガロア群が作用するもので、数論には欠かせないものである。しかし今回は少し扱いが雑になるが、名前だけの紹介としよう。

混合モチーフ

ここまでの話を進めてきて、どうモチーフが実際問題に役立つのか疑問に思われる方も多いと思う。通常チャウ群という複雑な群を相手にしても、問題は簡単にならないと思われるだろう。しかし、これがなかなか強力な手段となるのである。

多重ゼータ値が生成する $\mathbb{Q}$ ベクトル空間の次元を押さえるためには、簡単なモチーフに拡大を繰り返して得られる混合モチーフを考えて、その拡大の大きさをコントロールすることで目的が達成できる。

詳しい話はとても時間内に話すことは不可能だが、なるべく正確さを失わず、雰囲気がつかんでもらえるように説明を試みたいと思う。

混合テイト・モチーフ

今後基本的な building block となるテイト・モチーフについて述べよう。$f : \mathbf{P}^1 \to pt \to \mathbf{P}^1$ のグラフ $e = \Gamma_f \in \mathrm{Cor}(\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1)$ を考えると、冪単自己対応となるので $e' = 1 - e$ も冪単自己対応となる。$\mathbf{Z}(1) = M(\mathbf{P}^1, e')$ を考えてそのそれらの自己テンソル積 $\mathbf{Z}(n) = \mathbf{Z}(1)^{\otimes n}$ をテイト・モチーフという。チャウ・モチーフを含み拡大について閉じている混合モチーフのなかでテイト・モチーフを含む最小のものを混合テイト・モチーフという。もう一つ混合テイト・モチーフの特徴はある $\mathbf{Q}$ 上のホップ代数 ${}_BH(MT)_B$ の余加群の圏と圏同値となっていることである。この同値は混合テイト・モチーフ M に対して M のベッチ実現 M_B をとることによって与えられる。

モチーフと余加群

M から得られた M_B は ${}_BH(MT)_B$ 余加群となるので、$M_B \to M_B \otimes {}_BH(MT)_B$ という余作用が定義される。ド・ラム実現 M_{dR} に対しても同様にホップ代数 ${}_{dR}H_{dR}$ が構成ができ、同様の圏同値ができる。そして両方の実現 M_B, M_{dR} については ${}_BH_{dR}$ というホップ亜代数が定義され余作用は

$$M_{dR} \to M_B \otimes {}_BH_{dR} \tag{2}$$

で与えられる。ド・ラムの定理から来る同型写像 $M_{dR} \otimes C \to M_B \otimes C$ は比較同型とよばれ、(2) の余作用と ${}_BH_{dR} \xrightarrow{\text{comp}} \mathbb{C}$ から得られる。

多重ゼータ値の積分表示

さて、多重ゼータ値の話に戻ろう。多重ゼータ値のなすベクトル空間の次元の評価を混合テイト・モチーフの性質に帰着するための第一歩は多重ゼータ値が積分表示を持つということである。一般の場合は煩雑なので、小さい例でいうと、

$$\zeta(1,2) = \int_D \frac{dx}{x}\frac{dy}{1-y}\frac{dz}{1-z}, D = \{0 < z < y < x < 1\}$$

のような積分表示がある。この形の積分を反復積分という。これは多様体の対に対して定義される相対コホモロジーで考えたときのサイクル上の積分として定義される。

$P^1 - \{0,1,\infty\}$ のド・ラム基本群

$a, b \in \mathbf{P}^1 - \{0,1,\infty\}$ とする。$\dfrac{dx}{x}, \dfrac{dx}{1-x}$ についての非可換多項式環 $A_{dR} = \mathbf{Q}[\dfrac{dx}{x}, \dfrac{dx}{1-x}]$ と $\mathbf{P}^1 - \{0,1,\infty\}$ の基本群の群環 $A_B^* = \mathbf{Q}[\pi_1(\mathbf{P}^1 - \{0,1,\infty\}, a, b)]$ の間には反復積分をするということによるペアリングができる．このペアリングにより $A_{dR} \otimes C$ と A_B^* 上の C 値双対空間（で augmentaion ideal の高い冪が消える）$A_B \otimes C$ は同型となる。これは A_B と A_{dR} の比較同型という。A_{dR} の双対をド・ラム基本群という。

$\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ のド・ラム基本群

実は A_B, A_{dR} はあるモチーフの実現であることが示される。

Theorem

ある混合テイト・モチーフの対象 A が存在してそのベッチ実現、ドラム実現およびその間の比較写像が上で定義したものと一致する。

実はさらに $a \to +0, b \to 1-0$ という極限を考えても混合テイト・モチーフに由来することが証明できる。

多重ゼータ値とモチーフ

モチーフ A に対する余作用を考えると下の図式を得る。この図式を基本群の余作用図式と呼ぼう。

$$\begin{array}{ccccc} A_{dR} & \longrightarrow & A_B \otimes {}_BH(MT)_{dR} & \xrightarrow{[01]^*\otimes 1} & {}_BH(MT)_{dR} \\ & & & & \Big\downarrow \mathrm{comp} \\ & & & & \mathbf{C} \end{array}$$

例えば $\dfrac{dx}{x}\dfrac{dx}{1-x}\dfrac{dx}{1-x} \in A_{dR}$ のこの合成写像による行先は $\zeta(1,2)$ となる。

多重ゼータ値とモチーフ

従って多重ゼータ値で張られる空間は ${}_B H(MT)_{dR} \to \mathbb{C}$ の像に含まれることになる。他方実は ${}_B H(MT)_{dR}$ は代数的 K 理論を用いて計算することが可能で $\mathbb{Q}[c_2]$ 上 $c_3, c_5, c_7, \ldots,$ で自由に生成される非可換環 (シャッフル積により) と同型であることが知られており、これから Zagier の予想の上限が示される。

多重ゼータ値の深さ

最後に多重ゼータ値の**深さ**と、新しいモチーフ理論である**混合楕円モチーフ**について少しだけお話しよう。$\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_d)$ を許容指数とするとき d を $\mathbf{k}$ の深さといい、$d(\mathbf{k})$ と表す。Z_w を重さが w の多重ゼータ値の空間とすると、$\pi^2 Z_{w-2}$ はその部分空間となる。$\overline{Z_w} = Z_w / \pi^2 Z_{w-2}$ とおく。深さが d 以下の多重ゼータ値で生成される $\overline{Z_w}$ の部分空間を $\overline{Z_w}^{\leq d}$ とおき、

$$\overline{Z_w}^{d} = \overline{Z_w}^{\leq d} / \overline{Z_w}^{\leq d-1}$$

と定義する。

ブロードハースト=クライマー予想

ブロードハーストとクライマーにより次の予想（BK 予想）が提出された。

Conjecture (BK 予想)

$$\sum_{w,d} \dim(\overline{Z_w}^d) s^w t^d = \frac{1}{1 - \mathbb{O}t + \mathbb{S}t^2 - \mathbb{S}t^4}$$

ここで

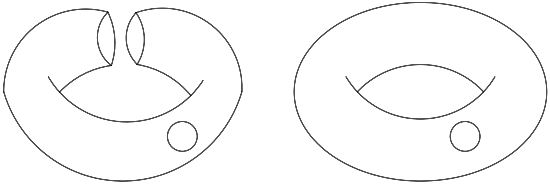
$$\mathbb{O} = \frac{s^3}{1-s^2}, \mathbb{S} = \frac{s^{12}}{(1-s^4)(1-s^6)}$$

である。

ここで S は楕円カスプ形式の次元の母関数であることに注意しよう。多重ゼータ値の深さはなにか楕円関数や保形形式と関係あるのだろうか。

楕円曲線と退化

楕円曲線と多重ゼータ値の深さがどのようにかかわるのかを簡単に説明しよう。下の図において右は楕円曲線（複素トーラス）に１個穴を開けたもの、左はさらに短い輪（メリディアン）にそって切り開いたものである。



左は $\mathbf{P}^1-\{0,1,\infty\}$ と同相であり右に埋め込むことができる。

楕円曲線と退化

この埋め込みから $\mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{P}^1-\{0,1,\infty\})]\to\mathbb{Q}[\pi_1(E-\mathrm{pt})]$ という写像が得られる。「完備化」という操作をするとド・ラム基本群についても同様の環準同型

$$\mathbb{Q}\langle\langle a,c\rangle\rangle\to\mathbb{Q}\langle\langle a,b\rangle\rangle : c\mapsto[a,b]$$

ができる。新しい重さ、楕円重さを a,b の双対の両方が 1 であると定義すると a,c の双対が $\dfrac{dx}{x},\dfrac{dx}{x-1}$ となるのでこれらの楕円重さはそれぞれ 1, 2 となる。従って (重さ)+(深さ)=(楕円重さ) という等式が成り立つのである。

混合楕円モチーフ

混合テイト・モチーフが $\mathrm{Z}(n)$ を building block として構成されたのと同様にして楕円曲線を building block として混合楕円モチーフが構成される。そのホップ代数を ${}_B H(MEM)_{dR}$ とおく。楕円曲線のド・ラム基本群の双対、ベッチ基本群の双対をそれぞれ $A_B(E), A_{dR}(E)$ とおくと、次の図式が得られる。

$$A_{dR}(E) \to A_B(E) \otimes {}_B H(MEM)_{dR}$$

さて $\mathrm{P} - \{0, 1, \infty\}$ と混合テイト・モチーフについての余作用図式とを重ね合わせることが BK 予想への鍵となると思われるがこれは今後の課題である。

まとめ

ゼータ値をもとにして積と和について閉じたより安定な「代数」として多重ゼータ値を考えるのが自然であることから出発して、下のことについてお話をした。

1. 代数多様体のド・ラム・コホモロジーと特異コホモロジーおよび二つをつなぐド・ラムの定理
2. コホモロジー理論のもととなっているモチーフの理論とそれを拡大した混合モチーフの理論
3. 多重ゼータ値が $\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ のド・ラム基本群、ベッチ基本群の周期として得られる

さらにこれらを用いて多重ゼータ値の生成する $\mathbf{Q}$ ベクトル空間の次元評価が得られることを話した。最後に多重ゼータ値の深さについての BK 予想へのアプローチについて言及した。

謝辞

このような立派な賞をいただき、また講演の機会を与えてくださった千葉大学の方々に深くお礼を申し上げたいと思います。
最後にこれまで大変お世話になった指導教官の塩田徹治氏、たくさんの数学を教えてくださった、加藤和也氏、織田孝幸氏、ピエール・ドリーニュ氏、志賀弘典氏、共同研究者の方々、斎藤毅氏、松本圭司氏、松本眞氏、リチャード・ハイン氏、花村昌樹氏、木村健一郎氏、朝倉政典氏、大坪紀之氏、楫元氏、山田裕史氏、また余白が小さすぎてここには書けませんが、たくさんの方々に研究を支えていただきました。この場をお借りして感謝の意を表したいと思います。