平成２４年度

千葉大学大学院理学研究科 博士前期課程

学力検査問題

（基盤理学専攻　数学・情報数理学コース）

専 門

平成２３年８月１６日（火）

試験時間　２４０分

「注意事項」

1. 問題は **A0** 問題が１題，**A** 問題が５題，**B** 問題が１２題ある。

A0 は全員が解答すること。

A 問題: **A1,...,A5** の中から 任意に３題選んで 解答すること。
（４題以上解答することは認められない。）

B 問題: **B1,...,B12** の中から 任意に１題選んで 解答すること。
（２題以上解答することは認められない。）

2. 解答用紙は **5** 枚あるので，そのすべてに 科目名，コース名と受験番号 を記入のこと。

3. 各解答用紙には，解答しようとする 問題番号を明記 し，

１枚に１題だけ を解答すること。

解答不能の場合も，解答用紙を持ち帰ってはならない。

4. 問題冊子は持ち帰ってもよい。

A0 X, Y を集合，f, g を X から Y への写像とする。以下の命題が正しいかどうか答え，正しければ証明し，誤りならば反例を挙げよ。

(i) 任意の有限部分集合 $A \subset X$ に対し $|A| = |f(A)|$ であることと，f が単射であることは同値。ただし $|A|$ は A の元の個数である。

(ii) $A,\ B$ を Y の部分集合とするとき，$A \subset B$ と $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$ は同値。ただし，$f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \in A\}$ は A の f による逆像である。

(iii) 任意の部分集合 $A \subset Y$ に対し $f^{-1}(A) = g^{-1}(A)$ であることと，$f = g$ であることは同値。

(iv) 任意の部分集合 $A \subset X$ に対して $f(g^{-1}(f(A))) = g(f^{-1}(g(A)))$ である。

A1 $r,\ n$ は $0 < r < n$ を満たす整数とし，W は $\mathbb{R}^n$ の r 次元部分ベクトル空間で，$W^\perp$ は標準内積に関する W の直交補空間とする。また $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ は W の正規直交基底，$\boldsymbol{x}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ は $W^\perp$ の正規直交基底とする。このとき次の各問いに答えよ。

(1) 各ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対し，

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in W \text{ かつ } \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \in W^\perp$$

を満たすようなベクトル $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ が一意的に存在することを証明せよ。また，$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ に対しこの $\boldsymbol{b}$ を対応させる写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ は線形写像であることを証明せよ。さらに，$\mathbb{R}^n$ の基底 $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ に関する f の表現行列を求めよ。

(2) $n = 3$ で，$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + y + z = 0 \right\}$ のとき，$\mathbb{R}^3$ の標準基底に関する (1) の f の表現行列を求めよ。

A2 以下の問いに答えよ。

(1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{\log x}{(1+x)^2} dx$ を求めよ。

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x)^2} dx$ を求めよ。

(3) 3 以上の自然数 n に対して

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x)^n} dx = -\frac{1}{n-1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-2} \right)$$

となることを示せ。

A3 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ に，距離 d を

$$d(x,y) = |x-y|, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

により定める。また $X = \mathbb{R} - \{0\}$ とし，$\mathbb{R}$ および X を d により距離空間とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1)

$$A = \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \text{ は } 0 \text{ でない整数} \right\}$$

は X における閉集合であるが，$\mathbb{R}$ における閉集合でないことを示せ。

(2) X は完備であるか。理由を述べて答えよ。

A4 X を $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \cdots\}$ に値をとる離散確率変数とする。

(1) X の期待値 $E[X]$ についての等式

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k)$$

を示せ。

(2) $P(X \geq k) = \dfrac{6}{(k+1)(k+2)(k+3)}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ に対して $E[X]$ を計算せよ。

A5 以下の Pascal プログラムを実行して，2 以上 1000 以下の整数 n を入力したとする。

```
program test(input,output);
const max = 999;
var n, k: integer;
    b, g: array[0..max] of 0..1;
begin
  readln(n);
  for k := 0 to n−1 do
    begin
      b[k] := 0;  g[k] := 0;
    end;
  b[n] := 0;
  repeat
    for k := n−1 downto 0 do write(b[k]:1);  write('     ');
    for k := n−1 downto 0 do write(g[k]:1);  writeln;
    k := 0;
    while b[k] = 1 do
      begin
        b[k] := 0;  k := k+1;
      end;
    b[k] := 1;  g[k] := 1 − g[k];
  until k = n
end.
```

(1) 3 を入力したとき，どのような出力があるか記せ。

(2) 上のプログラムを実行したとき出力される行の数を，n を使って表わせ。

(3) 出力の最初の行を第 0 行と数えたとき，第 $2^i - 1 - j$ 行と第 $2^i + j$ 行の関係およびそうなる理由を述べよ。ただし $0 \leq j \leq 2^i - 1$ で，最後の行は第 $2^{i+1} - 1$ 行以降となっているように i を取るものとする。

$\boxed{\textbf{B1}}$ 一般に，群 G に対し，長さ有限の G の部分群の列

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_n = \{e\}$$

で，各 $i = 1, 2, \ldots, n$ に対し，G_i が G_{i-1} の正規部分群で G_{i-1}/G_i がアーベル群になるようなものが存在するとき，G は可解群であるという。

(1) G, H は群，$f : G \to H$ は全射準同型写像とする。もし G が可解群ならば，H も可解群であることを証明せよ。

(2) H は G の正規部分群であるとする。もし H と G/H が可解群ならば，G も可解群であることを証明せよ。

(3) p, q は相異なる素数で $p > q$ であるものとし，G は位数 pq の有限群とする。H が位数 p の G の部分群ならば，H は G の正規部分群であることを証明せよ。また，これを用いて，G は可解群であることを証明せよ。

$\boxed{\textbf{B2}}$

(1) 環 $\mathbb{Z}[X]/(X^2-1)$ が整域でなく $\mathbb{Z}[X]/(X^2+1)$ が整域であることを示せ。

(2) p を奇素数とするとき，環 $\mathbb{Z}[X]$ のイデアルとして

$$(X^{p^2-1}-1) \subset (X^2+1)$$

であることを示せ。

(3) p を奇素数とし，自然な準同型

$$\mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}[X]/(p, X^2+1)$$

における $n \in \mathbb{Z}$, X の像をそれぞれ $\overline{n}$, $\overline{X}$ と書く。このとき，任意の $a, b \in \mathbb{Z}$ に対して

$$(\overline{a}\overline{X} + \overline{b})^p = \overline{a}\overline{X} + \overline{b}$$

が成立するための p の条件を求めよ。

(4) 環 $\mathbb{Z}[X]/(p, X^2+1)$ が整域であるための奇素数 p の条件を求めよ。

B3 6 角形 ABCDEF の 6 頂点と 6 辺からなる 1 次元単体複体を K，3 角形 PQR の 3 頂点と 3 辺からなる 1 次元単体複体を L とする。
(以下で考えるホモロジー群はすべて整数係数とする。)

(1) K と L のホモロジー群を求めよ。

(2) K から L への単体写像 $\varphi : K \to L$ で，次の 2 条件を満たすものをすべて求めよ。

(a) $\varphi(\mathrm{A}) = \mathrm{P}$,

(b) 誘導準同型 $\varphi_* : H_1(K) \to H_1(L)$ は単射であるが全射でない。

また，求めた φ について，φ_* の像を求めよ。

B4 3 次元ユークリッド空間内の開集合

$$D = \{(x, y, z) \,|\, 0 < x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$$

上で定義された 1 次微分形式

$$\omega = \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{(1 - x^2 - y^2 - z^2)(x^2 + y^2 + z^2)}}$$

について，以下の問いに答えよ。

(1) $d\omega = 0$ となることを示せ。

(2) D 上で定義された C^∞ 級関数 f で，方程式

$$df = \omega$$

を満たすものが存在することを示せ。

B5 複素平面の原点を中心とするベキ級数

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{n!}$$

の収束半径を ρ とする。

(1) ρ を求めよ。

(2) $f(z)$ は閉円板 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \rho\}$ で連続な関数であることを示せ。

(3) $F(z) = zf'(z)$ とおく。有理数 α に対して $\displaystyle\lim_{r \to \rho - 0} F(re^{2\pi i \alpha})$ を求めよ。

(4) $f(z)$ は開円板 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \rho\}$ より真に広い領域には決して解析接続されないことを示せ。

$\boxed{\textbf{B6}}$ $x(t)$ は t を変数とする関数とする。次の微分方程式

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+2(t-1)\frac{dx(t)}{dt}+(t^2-2t+2)x(t)=te^{-t^2/2}$$

について以下の問いに答えよ。

(1) $x(t)$ が解であるとき，$y(t)=x(t)e^{t^2/2}$ とおく。$y(t)$ が満たす二階常微分方程式をひとつ与えよ。

(2) 初期条件 $x(0)=-1,\ \dfrac{dx}{dt}(0)=1$ に対する解 $x(t)$ を求めよ。

$\boxed{\textbf{B7}}$ 以下の問いに答えよ。

(1) 次の命題は正しいか。正しい場合は証明を，そうでない場合は反例を与えよ。

「f_n を区間 $[0,1]$ 上の実数値連続関数列とする。$[0,1]$ 上の関数 f が

$$\forall x\in[0,1]\quad f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$$

$$\text{かつ}\qquad \lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]}|f(x)-f_n(x)|dx=0$$

を満たすとする。このとき f は $[0,1]$ 上の連続関数である。」

(2) f_n を区間 $[0,1]$ 上の実数値ルベーグ可測関数列とする。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{[0,1]}|f_n(x)|dx<\infty$$

であるとき，測度零の集合 $E(\subset[0,1])$ が存在して，$x\notin E$ ならば

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$$

が有限な極限値 $g(x)$ を持つことを示せ。

(3) (2) のとき

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]}\left|g(x)-\sum_{k=1}^{n}f_k(x)\right|dx=0$$

を示せ。

B8 X, Y は独立でともに平均 0, 分散 1 の正規分布に従う確率変数とする。$W = X + Y, Z = X/Y$ とおく。

(1) $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して，$E[e^{\alpha X}]$ を求めよ。ただし，$E[\,\cdot\,]$ は期待値を表す。

(2) W の平均と分散を求めよ。またその確率密度関数を求めよ。

(3) $E[W|X > 0, Y > 0]$ を求めよ。ただし，$E[\,\cdot\,|\,\cdot\,]$ は条件付き期待値を表す。

(4) Z の確率密度関数を求めよ。

B9 $X_1, \ldots, X_n, \Theta$ は実数値確率変数で，次を満たすものとする。

(i) Θ は既知のパラメータ $\alpha > 0, \beta > 0$ をもつベータ分布 $\mathrm{Beta}(\alpha, \beta)$ に従うとする。すなわち，Θ は密度関数

$$\pi(\theta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1} \quad (0 < \theta < 1)$$

をもつ。ただし，$\Gamma(a) = \displaystyle\int_0^\infty z^{a-1}e^{-z}\,dz$ はガンマ関数である。

(ii) $\Theta = \theta (0 < \theta < 1)$ という条件の下で，$X_1, \ldots, X_n$ は独立で，それぞれ 2 項分布 $\mathrm{Bi}(1, \theta)$ に従う。

また $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\Theta = \theta$ という条件の下での Y の条件付き分布を求めよ。

(2) $Y = y$ という条件の下での Θ の条件付き分布を求めよ。

(3) Θ の平均 $E[\Theta]$ を求めよ。

(4) Θ のベイズ推定量 $E[\Theta|Y = y]$ を求めよ。

B10 h を関数とする。関数 f, g を計算するアルゴリズムが以下のように与えられているとする。

f の計算アルゴリズム	g の計算アルゴリズム
入力：x; $\alpha \leftarrow u(x)$; $y \leftarrow g(\alpha)$; 出力：y.	入力：x; $\alpha \leftarrow v(x)$; $y \leftarrow h(\alpha)$; 出力：y.

ここで，関数 u, v は多項式時間で計算可能な関数とする。また p_u, p_v は，任意の x に対して $|u(x)| \leqq p_u(|x|)$ および $|v(x)| \leqq p_v(|x|)$ を満たすものとする。サイズ k の入力に対する u, v, h の計算量を $t_u(k), t_v(k), t_h(k)$ とする。このとき，以下の問いに解答せよ。

(1) 関数 f の計算量を評価せよ。

(2) 関数 h が多項式時間で計算可能ならば，f もまた多項式時間で計算可能となることを示せ。

B11 次の Scheme のプログラムについて，以下の問いに答えよ。

```
(define (a x y)
  (lambda (z) (x (y z))))

(define (b x)
  (if (null? x) (lambda (z) z)
      (a (lambda (z) (cons (car x) z)) (b (cdr x)))))
```

(1) `((a (b '(1 2 3)) (b '(4 5))) '(6))` の評価結果を記せ。

(2) 任意の整数 $n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots, n_k$ $(i < k)$ に対し，

`((a (b '(`n_1 n_2 $\cdots$ n_i`)) (t (b '(`n_{i+1} $\cdots$ n_k`)))) '())`

の評価結果が (n_1 n_2 $\cdots$ n_i n_{i+2} $\cdots$ n_k) となるような関数 `t` を定義し，そうなる理由を述べよ。

(3) 任意の整数 $n_0, n_1, n_2, \ldots, n_k$ に対し，

`((r (b '(`n_1 n_2 $\cdots$ n_k`))) '(`n_0`))`

の評価結果が (n_k $\cdots$ n_2 n_1 n_0) となるような関数 `r` を定義し，そうなる理由を述べよ。

$\boxed{\textbf{B12}}$　等号付きの1階述語論理の言語と，この言語に対する構造 M を考える。$|M|$ によって構造 M の領域を表す。

(1) n を2以上の整数とする。任意の構造 M に対して

$$M \models \varphi_n \Leftrightarrow |M| \text{ の要素の個数は } n \text{ 以上}$$

となる閉論理式 φ_n を求めよ。

(2) 任意の構造 M に対して

$$M \models T \Leftrightarrow |M| \text{ は（空でない）有限集合}$$

となる閉論理式の集合 T は存在しないことを証明せよ。