平成２１年度

千葉大学大学院理学研究科 博士前期課程

学力検査問題

（数学・情報数理学コース）

数 学

平成２０年８月１８日（月）

１３時００分〜１７時００分

「注意事項」

1. **問題は A0 問題が１題、A 問題が５題、B 問題が１２題ある．**

   A0 は全員が解答すること．

   A 問題: A1,...,A5 の中から 任意に３題選んで 解答すること．
   （４題以上解答することは認められない．）

   B 問題: B1,...,B12 の中から 任意に１題選んで 解答すること．
   （２題以上解答することは認められない．）

2. **解答用紙は 5 枚あるので、そのすべてに 科目名，コース名と受験番号 を記入のこと．**

3. **各解答用紙の正方形空欄に、解答しようとする 問題番号を明記 し、**
   １枚に１題だけ を解答すること．
   解答不能の場合も、解答用紙を持ち帰ってはならない．

4. **問題冊子は持ち帰ってもよい．**

$\boxed{\textbf{A0}}$

(I)　Ω は集合で, $Y \subset X \subset \Omega$, $Z \subset X$ とする．このとき,

$$Y - (Y \cap (X - Z)) = Y \cap Z$$

であることを証明せよ．

　ただし, $A \subset B$ は $A \subseteqq B$ と同じ意味であり, $A - B = \{x \in A \mid x \notin B\}$ である．

(II)　X, Y は集合, $f\colon X \to Y$ は写像で, $A \subset X$, $B \subset X$, $C \subset Y$ とする．次の (1), (2), (3) の命題の真偽を述べ, 正しいものは証明し, 正しくないものは反例を示せ．

(1)　$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(2)　$f(f^{-1}(C)) = C$.

(3)　$f(f^{-1}(f(A))) = f(A)$.

ただし, $f(A) = \{f(x) \in Y \mid x \in A\}$, $f^{-1}(C) = \{x \in X \mid f(x) \in C\}$ である．

$\boxed{\textbf{A1}}$

$V \subset \mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}^n$ の部分空間であるとは, 次の (i), (ii) が成り立つことをいう．

(i) $\mathbf{x} \in V$ かつ $\mathbf{y} \in V$ ならば $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V$.

(ii) $a \in \mathbb{R}$ かつ $\mathbf{x} \in V$ ならば $a\mathbf{x} \in V$.

　また, n 次実正方行列 A に対し, $\operatorname{Im} A = \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$, $\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ と約束する．このとき次の問いに答えよ．

(1)　(ii) を満たすが (i) を満たさない集合 $V \subset \mathbb{R}^n$ を 1 つ例示せよ．

(2)　次の (ア)〜(オ) のうち, $\mathbb{R}^3$ の部分空間であるものをすべて抜き出せ．証明や理由は書かなくてよく, 答だけ書けばよい．この問いでは, ベクトルは行ベクトルで記述する．

(ア) 球 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$

(イ) 上半空間 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$

(ウ) xy-平面 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$

(エ) x-軸 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z = 0\}$

(オ) 原点だけからなる集合 $\{(0, 0, 0)\}$

(3)　V は $\mathbb{R}^n$ の勝手な部分空間とする．V の基底が存在することを利用して, ある n 次実正方行列 A によって $V = \operatorname{Im} A$ と書けることを証明せよ．

(4)　上の問い (3) の V に対し, ある n 次実正方行列 B を選んで, $V = \operatorname{Ker} B$ と書けることを証明せよ．

　このとき, 問い (3) で選んだ行列 A について, $\operatorname{rank} A$ と $\operatorname{rank} B$ の間にどのような関係があるか答えよ．証明は不要である．

(5)　もし, V が $\mathbb{R}^n$ の部分空間で, $V \neq \mathbb{R}^n$ ならば, $A^n = O$ を満たすような n 次実正方行列 A で, $V = \operatorname{Im} A$ を満たすものが存在することを証明せよ．

A2

(1) 閉区間 $[a,\,b]$ 上の連続関数 $f(x)$ に関する中間値の定理を述べよ.

(2) $f(x)$, $g(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で定義された連続関数で, $[a,\,b]$ 上で $g(x) \geqq 0$ であるならば,

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$$

となるような $\xi \in [a,\,b]$ が存在することを証明せよ.

(3) $f(x)$, $g(x)$ が閉区間 $[a,\,b]$ で定義された C^1 級の関数で, $g(x)$ が単調増加ならば,

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = g(a)\bigl(f(\xi)-f(a)\bigr)+g(b)\bigl(f(b)-f(\xi)\bigr)$$

となるような $\xi \in [a,\,b]$ が存在することを証明せよ.

(4) $0<a<b$ のとき,

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \frac{\sin nx}{x}\,dx = 0$$

となることを証明せよ.

A3 　$\mathbb{R}$ や $\mathbb{R}^2$ には距離空間としての通常の位相を入れて考え, それらの部分集合には相対位相を入れて考える.

(1)　以下の集合 A_1 から A_5 のうち $\mathbb{R}^2$ の閉集合であるものをすべて選べ. 理由や説明は不要で, 答だけ書けばよい.

$A_1 = \bigl\{(0,\,0)\bigr\}$

$A_2 = \bigl\{(x,\,y)\in\mathbb{R}^2 \bigm| x^2+y^2=1\bigr\}$

$A_3 = \bigl\{(x,\,y)\in\mathbb{R}^2 \bigm| x\in\mathbb{Q}$ かつ $y\in\mathbb{Q}$ かつ $x^2+y^2\leqq 1\bigr\}$

$A_4 = \bigl\{(x,\,0)\in\mathbb{R}^2 \bigm| x\in\mathbb{R}\bigr\}$

$A_5 = \bigl\{(x,\,y)\in\mathbb{R}^2 \bigm| x\geqq 0$ かつ $y\geqq 0\bigr\}$

(2)　開区間 $(0,\,\infty)=\bigl\{x\in\mathbb{R} \bigm| x>0\bigr\}$ と $\mathbb{R}$ は位相同型 (同相) であることを証明せよ.

(3)　開区間 $(0,\,1)$ と半開半閉区間 $[0,\,1)=\bigl\{x\in\mathbb{R} \bigm| 0\leqq x<1\bigr\}$ は位相同型 (同相) でないことを証明せよ.

(4)　関数 (写像) $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が,「任意の $y\in\mathbb{R}$ に対し $f^{-1}(y)$ は $\mathbb{R}$ の開集合である」という条件を満たすとき, f は定数関数であることを証明せよ.

A4 $0 < q < 1$ とする．$\{X_k\}_{k=1}^{n}$ は独立同分布の確率変数で, 各 X_k はパラメータ q の幾何分布に従うとする．ここで, パラメータ q の幾何分布の離散密度関数は

$$f(x) = (1-q)q^x, \quad x = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

で与えられる．

(i) X_1 の平均と分散を求めよ．

(ii) $x, y \in \mathbb{N}_0 = \{0,\ 1,\ 2, \ldots\}$ に対し次の等式が成り立つことを示せ．

$$P[X_1 \geqq x + y \mid X_1 \geqq x] = P[X_1 \geqq y]$$

(iii) $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ とおく．S_n の離散密度関数を求めよ．

A5 次の Pascal の関数 f について問に答えよ．

```
function f(n : integer) : integer;
begin
   if n <= 0 then f := 0
   else begin
      f := f(n div 2) + 1;
      write(n mod 2)
   end
end;
```

(1) 整数値 n が以下のそれぞれであったとき、呼び出し f(n) による出力と返り値を書け．理由は述べなくてよい．

  (a) 0
  (b) 1
  (c) 36

(2) n が整数値のとき、呼び出し f(n) による出力と返り値を簡潔に述べよ．

(3) 任意の整数値 n に対し、呼び出し f(n) と g(n) が出力と返り値に関して同一となるような、Pascal の関数 g を作成せよ．ただし、再帰呼び出し、配列、レコード、集合、ポインタ、および関数 f はいずれも用いてはならない．

B1 体 K 上の正則な n 次正方行列全体の集合を $\mathrm{GL}(n,\,K)$ で表わし, 行列の積について群であるとみる．さらに,

$$\mathrm{SL}(n,\,K) = \left\{ \sigma \in \mathrm{GL}(n,\,K) \;\middle|\; \det \sigma = 1 \right\}$$

とする．

(1) $\mathrm{SL}(n,\,K)$ は $\mathrm{GL}(n,\,K)$ の正規部分群であることを証明せよ．

(2) 剰余群 $\mathrm{GL}(n,\,K)/\mathrm{SL}(n,\,K)$ はアーベル群であることを証明せよ．

(3) $K = \mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ のとき, $\mathrm{GL}(n,\,K)$ の部分群で $\mathrm{SL}(n,\,K)$ を含むものは何個あるか．

B2 R は可換環とする．一般に, R のイデアル $\mathfrak{a}$ に対して剰余環 $R/\mathfrak{a}$ の元を $x+\mathfrak{a}$ $(x \in R)$ のように表わす．さて, I と J は R のイデアルとする．

(1) 写像 $f\colon (R/I) \times (R/J) \longrightarrow R/(I+J)$ を,

$$f(x+I,\, y+J) = (x-y) + (I+J)$$

で定めたい．ここで, $x, y \in R$ である．この写像 f は矛盾なく定義されている (well-defined である) ことを証明せよ．

(2) 写像 $g\colon R \longrightarrow (R/I) \times (R/J)$ を $g(x) = (x+I,\, x+J)$ として定める．このとき, $\mathrm{Ker}\, g$ を I と J を用いて表せ．

(3) $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Im}\, g$ となることを証明せよ．

B3 4 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ の部分集合 X, Y を次のように定める．

$$X = \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x^2 + xy + y^2 = 1 \right\}$$
$$Y = \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; (x-z)^2 + (y-w)^2 = 1 \right\}$$

(1) X が可微分多様体となることを証明せよ．

(2) Y が可微分多様体となることを証明せよ．

(3) X と Y は微分同相 (可微分多様体として同型) であることを証明せよ．

$\boxed{\textbf{B4}}$ 一般に, X, Y が位相空間のとき, 2 つの連続写像 $g\colon X \to Y$ と $h\colon X \to Y$ がホモトピックであるとは, 連続写像 $F\colon X \times [0,\,1] \longrightarrow Y$ で $F(x,\,0) = g(x)$, $F(x,\,1) = h(x)$ $(\forall x \in X)$ となるようなものが存在することをいう．

(1)　位相空間

$$S^1 = \left\{(x,\,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 1\right\}$$

を考える．また, $c \in \mathbb{R}$ を定数として, 定数写像 $f_0\colon S^1 \to \mathbb{R}$ を

$$f_0(x,\,y) = c \quad (\forall (x,\,y) \in S^1)$$

によって定める．このとき, 任意の連続写像 $f\colon S^1 \to \mathbb{R}$ は f_0 とホモトピックであることを証明せよ．

(2)　位相空間

$$S^2 = \left\{(x,\,y,\,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$$

を考える．また, $b \in S^2$ を定点として, 定数写像 $g_0\colon S^1 \to S^2$ を

$$g_0(x,\,y) = b \quad (\forall (x,\,y) \in S^1)$$

によって定める．いま, 連続写像 $g\colon S^1 \to S^2$ が全射でないとき, g は g_0 とホモトピックであることを証明せよ．

$\boxed{\textbf{B5}}$ D は滑らかな単純閉曲線 C で囲まれた複素数平面 $\mathbb{C}$ 内の単連結な開集合とする．f, g は D の閉包 $\overline{D}$ のある近傍上で正則な関数であると仮定する．さらに, f は定数関数でなく, かつ, f は D の境界 C 上には零点を持たないと仮定する．

(1)　f の D 内の零点は有限個であることを証明せよ．

(2)　D 内の f の零点全体を $a_1,\ldots,\,a_n$ とし, a_k における f の零点の位数を m_k とする $(k = 1,\ldots,\,n)$．このとき,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{k=1}^{n} m_k g(a_k)$$

が成り立つことを証明せよ．ただし, $\int_C$ は左手側に D の内部を見る向きに C 上を 1 周する積分とする．

B6 $\mathbb{R}$ 上の実数値 2 乗ルベーグ可積分関数全体の集合を $L^2(\mathbb{R})$ とする.

(1) 任意の $f \in L^2(\mathbb{R})$ と正の実数 $\varepsilon > 0$ に対して, ある有界区間の外では 0 となるような $g \in L^2(\mathbb{R})$ で,

$$\int_{\mathbb{R}} \left| f(x) - g(x) \right|^2 dx < \varepsilon$$

となるようなものが存在することを証明せよ.

(2) 任意の $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ に対して

$$\lim_{t \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x+t)\, dx = 0$$

であることを証明せよ.

B7 $y(x)$, $z(x)$ は x を変数とする関数とする.

(1) 微分方程式

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x-1)/x & 1/x \\ 0 & 1/x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

の一般解を求めよ. ただし

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dy/dx \\ dz/dx \end{pmatrix}$$

である.

(2) 微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x-1}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x^2} y = 2x + 1$$

の一般解を求めよ.

$\boxed{\textbf{B8}}$ 確率変数 $X_1,\ X_2$ が独立で, 同じ密度関数 $f(x;\theta) = \dfrac{3x^2}{\theta^3}$ を持つとする．ただし, $\theta > 0$ で $0 < x < \theta$ とする．このとき, 次の問いに答えよ．

(1) 最大値統計量 $Y = \max\{X_1,\ X_2\}$ の確率密度関数を求めよ．

(2) 推定量 $T = \dfrac{7}{6}Y$ が θ の不偏推定量であること, すなわち $E[T] = \theta$ であることを証明せよ．

(3) 推定量 T の分散を求めよ．

(4) 定数 c に対して, 推定量 $T_c = cY$ の平均 2 乗誤差 $E\big[(T_c - \theta)^2\big]$ を求めよ．また, $c^* = \dfrac{8}{7}$ のとき T_{c^*} が最適であることを証明せよ．

$\boxed{\textbf{B9}}$ (1) p は実数で, $p > 0$ とする．X を確率変数とし, $E\big[\ |X|^p\ \big] < \infty$ とする．このとき, $x > 0$ に対し,

$$P\big[\ |X| > x\ \big] \leqq \frac{E\big[\ |X|^p\ \big]}{x^p}$$

が成り立つことを証明せよ．

(2) $Y,\ Y_n\ (n = 1,\ 2, \ldots)$ は確率変数とし,

$$E\big[\ |Y|^2\ \big] < \infty, \quad E\big[\ |Y_n|^2\ \big] < \infty, \quad (n = 1,\ 2, \ldots)$$

が成り立つと仮定する．Y_n が Y に 2 次平均収束する (すなわち, $\lim_{n\to\infty} E\big[\ (Y_n - Y)^2\ \big] = 0$) ならば, Y_n は Y に確率収束することを証明せよ．

(3) $Z_n\ (n = 1,\ 2, \ldots)$ は独立な確率変数列で,

$$E[\ |Z_n|^2\ ] < \infty, \quad E[Z_n] = m, \quad V[Z_n] \leqq v, \quad (n = 1,\ 2, \ldots)$$

が成り立つとするとき, 任意の実数 $\varepsilon > 0$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\ \left|\frac{Z_1 + \cdots + Z_n}{n} - m\right| > \varepsilon\right] = 0$$

が成り立つことを証明せよ．

B10 開括弧と閉括弧の 2 つの文字から作られる文字列のうち、括弧がバランスしているものを全て集めてできる言語を考える.

(1) この言語を生成する文脈自由文法を与えよ.

(2) この言語は正則言語ではないことを証明せよ.

B11 次の Scheme のプログラムについて問に答えよ.

```
(define pr
  (lambda (x y)
    (lambda (f)
      (f x y))))
(define p1 [exp1])
(define p2 [exp2])

(define rf
  (lambda (x)
    (lambda (f)
      (f x [exp3]))))
(define dr p1)
(define an [exp4])
```

(1) 任意の値 v_1, v_2 に対し、`(p1 (pr` v_1 v_2`))` を評価した結果は v_1 になり、`(p2 (pr` v_1 v_2`))` を評価した結果は v_2 になる. $\boxed{\text{exp1}}$, $\boxed{\text{exp2}}$をそれぞれ Scheme の式で埋めよ.

(2) 値 v に対し、`(dr (rf` v`))` を評価した結果を書け.

(3) 任意の値 v_1, v_2, v_3, v_4 に対し、以下の式を評価した結果は v_3 になる.

```
(let ((p (pr (rf v1) (rf v2))))
  (an (p1 p) v3)
  (an (p2 p) v4)
  (dr (p1 p)))
```

$\boxed{\text{exp3}}$, $\boxed{\text{exp4}}$をそれぞれ Scheme の式で埋めよ.

B12 ユークリッドのアルゴリズム

```
Input a,b;
 r ← a;
 while r>0 do
 begin
   r ← a mod b;(*) a ← b; b ← r;
 end;
Output a.
```

において，$\texttt{gcd}(a,b)=1$ となる自然数 a,b $(a>b)$ の入力に対して，$r_0=a$，$r_1=b$ とおき，$i \geqq 1$ に対して，アルゴリズム中 $(*)$ が i 回実行された直後の $\texttt{r}$ の値を r_{i+1} として，そのときの商 $\lfloor \texttt{a/b} \rfloor$ の値を q_i とする．また，この入力 a,b に対して while 文を N 回実行した後アルゴリズムが終了するとする．このとき以下の (i) および (ii) に解答せよ．

(i) $1 \leqq k \leqq N-1$ となる k に対して $q_k \geqq 1$ となり，かつ，$q_N \geqq 2$ となることを示せ．

(ii) $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ とする．このとき，$0 \leqq k \leqq N$ となる k に対して $r_k \geqq \alpha^{N-k}$ が成り立つことを示すことにより，$N \leqq \dfrac{\log b}{\log \alpha} + 1$ となることを示せ．