

平成13年度
自然科学研究科 博士前期課程
学力検査問題
(数学・情報数理学専攻)

数学A

平成12年8月23日(水)
9時00分～12時00分

「注意事項」

1. 問題は8題であり、これらの中から任意に4題選んで解答すること。
(5題以上解答することは認められない。)
2. 解答用紙は4枚あるので、そのすべてに科目名, 専攻名と受験番号を記入のこと。
3. 各解答用紙には、解答しようとする問題番号を明記し、
1枚に1題だけを解答すること。
解答不能の場合も、解答用紙を持ち帰ってはならない。
4. 問題冊子は持ち帰ってもよい。

A1 n 次実正方行列全体の集合 $M(n, \mathbb{R})$ は、行列の和と実数倍により \mathbb{R} 上のベクトル空間となる。

$$V = \{X \in M(2, \mathbb{R}) \mid {}^tX = X\},$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

とし、写像 $f : M(2, \mathbb{R}) \rightarrow M(2, \mathbb{R})$ を $f(X) = AX + XA$ で定めるとき、次の問いに答えよ。

- (1) V は $M(2, \mathbb{R})$ の部分ベクトル空間であることを示し、その基底を 1 組与えよ。
- (2) f は V の線形変換を定めること（すなわち、線形性と $f(V) \subset V$ ）を示せ。
- (3) (1) で求めた基底に関する、線形変換 $f : V \rightarrow V$ の表現行列（行列表示）を求めよ。
- (4) f の像 $f(V)$ の次元を求めよ。

A2 以下、行列、ベクトル、ベクトル空間はすべて実数体 \mathbb{R} 上で考える。3 次の行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

に対して、次の各問いに答えよ。

- (1) A の固有値をその重複度込みで求めよ。
- (2) A のそれぞれの固有値に関する固有空間とその次元を求めよ。
- (3) A を直交行列で対角化せよ。

A3 平面上の領域を

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + xy + y^2 \leq 1\}$$

とすると、次の重積分

$$\int \int_D e^{-(x^2+xy+y^2)} dx dy$$

の値を求めよ。

A4 実数空間 $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ 上で定義された実数値関数 $f(x)$ に対して、

- (1) “ $f(x)$ は \mathbb{R} 上で連続である” ことの定義を述べよ。
- (2) 命題 “ $f(x)$ は \mathbb{R} 上で連続である” と命題 “ $f(x)$ は \mathbb{R} 上で一様連続である” の違いを説明せよ。
- (3) $f(x)$ は \mathbb{R} 上で連続で、さらに

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

のとき、 $f(x)$ は \mathbb{R} 上で一様連続であることを示せ。

A5 \mathbb{R}^n 上の通常の距離関数を d とする。 \mathbb{R}^n の空でない部分集合 A, B に対して

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

とおく。

- (1) $A = \{a\}$ で、 B が閉集合で $A \cap B = \phi$ のとき、

$$d(A, B) > 0 \quad \text{かつ} \quad \exists b \in B, d(A, B) = d(a, b)$$

であることを示せ。

- (2) A が有界閉集合で、 B が閉集合で $A \cap B = \phi$ のとき、

$$d(A, B) > 0 \quad \text{かつ} \quad \exists a \in A, \exists b \in B, d(A, B) = d(a, b)$$

であることを示せ。

A6 実数値連続型確率変数 X の分布関数を F_X とする。

- (1) $Y = F_X(X)$ としたとき, Y の分布関数を求めよ。
- (2) $Z = X^2$ としたとき, Z の分布関数を求めよ。
- (3) X が標準正規分布に従うとき, (2) で定義した Z の確率密度関数を求めよ。

A7 大小比較可能な型のデータを整列することを考える。

- (1) 4 つの異なるデータを比較によって整列するとき, 最悪の場合は 4 回の比較では整列できないことを示せ。
- (2) 4 つの異なるデータは最悪の場合でも 5 回の比較で整列できることを示せ。

A8 Pascal のプログラムで、定数 `size`、変数 `n` と `a` が次のように定義あるいは宣言されており、`n` を 1 から `size` の間の適当な値として、変数 `n` には、`n`、配列 `a` の `a[1], \dots, a[n]` には、昇順に値がセットされているものとする。即ち、任意の $i(1 \leq i < n)$ について、 $a[i] \leq a[i + 1]$ である。

```
const size = 65535;
var   n : 0..size;
      a : array [1..size] of integer;
```

また、関数 `search` が、仮引数 `x` に与えられた値が配列 `a` にあるかどうかを二分探索で探すものとして、次の様に宣言されている。

```
function search(x : integer; var p:integer) : Boolean;
var   i,j,k : integer;
begin
  i:=1; j:=n;
  while [P: condition] do begin
    k:=(i+j) div 2;
    [Q: set i and/or j]
  end;
  [R: set p and function value]
end;
```

これは、探索が成功したとき、即ち、ある整数 $p(1 \leq p \leq n)$ に対して、 $x = a[p]$ なるとき、その関数値を `true` とし、かつ引数 `p` に値 p を返し、探索が失敗したとき関数値を `false` とするものである。

但し、`P, Q, R` のところは記されていない。ここで、`Q` の部分が次の 3 つの場合について、`P, R` の適当なプログラムの部分を記せ。

1. `if x ≤ a[k] then j:=k-1;`
`if x ≥ a[k] then i:=k+1`
2. `if x < a[k] then j:=k-1;`
`else if x > a[k] then i:=k+1`
`else begin i:=k; j:=k end`
3. `if x < a[k] then j:=k-1 else i:=k+1`